

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

Clasa a VIII-a

1. Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $abc = 1$.

a) Demonstrați că $\frac{1}{ab(c^2+1)} + \frac{1}{bc(a^2+1)} + \frac{1}{ac(b^2+1)} \leq \frac{3}{2}$;

b) Calculați valoarea expresiei $E = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$.

2. Arătați că $24\sqrt{2} \leq \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(y + \frac{12}{y}\right) \leq 35$ pentru orice numere reale $x \in [2, 3]$ și $y \in [3, 4]$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2024

3. În vârful D al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara VD pe planul dreptunghiului. Bisectoarea $\sphericalangle ADC$ intersectează bisectoarea $\sphericalangle DCB$ în Q . Fie T și P respectiv mijloacele segmentelor CV și BV , iar M și N centrele de greutate ale triunghiurilor VAD , respectiv ADQ . Arătați că:

a) $VA \parallel (TBD)$;

b) Triunghiul PDC este isoscel;

c) $MN \perp CQ$.

4. Se consideră tetraedrul $VABC$ și punctele M , N și P mijloacele muchiilor VA , VB , respectiv VC .

a) Arătați că planele (MNP) și (ABC) sunt paralele.

b) Dacă S este piciorul perpendicularei din V pe bisectoarea unghiului VAB , demonstrați că punctele M, N, P și S sunt coplanare.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de 3 ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.